11.5. Изначально на доске написано 10 единиц. Гриша и Глеб играют в игру, делая ходы по очереди. Своим ходом Гриша возводит

36

некоторые 5 чисел на доске в квадрат. Глеб своим ходом выбирает несколько (возможно, ни одного) чисел на доске и увеличивает каждое из них на 1. Если в течение 10 000 ходов на доске появится число, делящееся на 2023, то побеждает Глеб, иначе побеждает Гриша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым ходит Гриша? (*Г. Никитин*)

Ответ. Побеждает Гриша.

Решение. Заметим, что $2023 = 7 \cdot 17^2$. Гриша разобьёт числа на доске на две группы по 5 и будет возводить в квадрат числа из первой группы и из второй группы по очереди. Легко видеть, что квадраты целых чисел, не кратных 7, при делении на 7 могут давать лишь остатки 1, 2 и 4. Следовательно, после увеличения максимум на 2 числа на доске будут давать при делении на 7 только остатки 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Значит, ни одно из чисел не будет делиться 7, а поэтому не будет делиться и на 2023.

Замечание. Существуют и другие решения.

Комментарий. Число 2023 неверно разложено на простые множители, но это не влияет на решение задачи — снимается 1 балл.

При переборе квадратичных вычетов по модулю 7 пропущен вычет, отличный от 0 — снимается 2 балла.

Приведено рассуждение, решающее задачу для простых чисел p вида $8k + 7$, но в качестве p выбрано составное число или число, не являющееся делителем 2023 — не более 2 баллов.

11.6. Плоскость α пересекает рёбра AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках X, Y, Z и T соответственно. Оказалось, что точки Y и T лежат на окружности ω, построенной на отрезке XZ как на диаметре. Точка P отмечена в плоскости α так, что прямые PY и PT касаются окружности ω. Докажите, что середины рёбер AB, BC, CD, DA и точка P лежат в одной плоскости. (*А. Кузнецов*)

Решение. Из условия задачи мы сразу получаем, что $\angle XYZ = 90^\circ = \angle XTZ$. Обозначим через Q точку пересечения прямых XY и ZT, через R — точку пересечения прямых ZY и XT (см. рис. 7). Без ограничения общности можно считать, что точка Z лежит на отрезках RY и QT. Поскольку точка R лежит и в плоскости ABD, и в плоскости BCD, то она лежит на прямой BD. Аналогично, точка Q лежит на прямой AC.

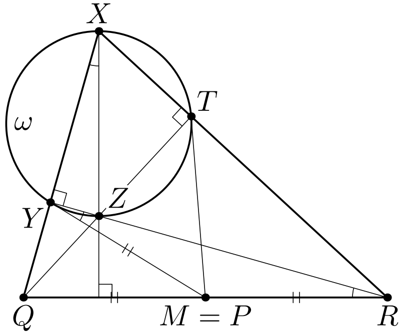

Рис. 7

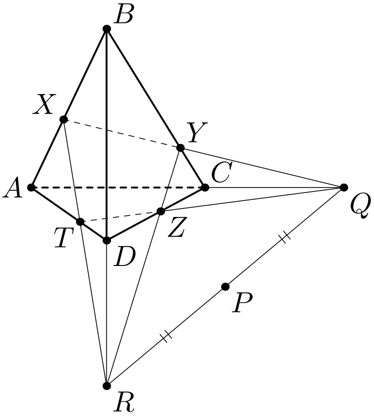

Рис. 8

Заметим, что RY и QT — высоты треугольника XQR. Тогда Z — точка пересечения высот этого треугольника, и поэтому $XZ \perp QR$. Пусть M — середина отрезка QR. Поскольку $\angle QYR = 90^\circ$, то $YM = MR = RQ$ по свойству медианы прямоугольного треугольника. Значит, $\angle MYR = \angle YRQ = 90^\circ - \angle XQR = \angle ZXQ$. Следовательно, прямая YM касается окружности ω. Аналогично, прямая TM тоже касается окружности ω, поэтому точки M и P совпадают.

Рассмотрим две параллельные плоскости β и γ, одна из которых содержит отрезок AC, а другая — отрезок BD. Заметим, что середины всех отрезков, соединяющих точку из плоскости β и точку из плоскости γ, лежат в одной плоскости, параллельной β и γ. Действительно, если ввести декартовы координаты так, что одна из плоскостей задаётся уравнением $z = 0$, а другая — уравнением $z = h$ (где h есть расстояние между плоскостями β и γ), то середины всех рассматриваемых отрезков лежат в плоскости $z = h/2$. Применяя это наблюдение для отрезков AB, BC, CD, DA, QR, мы получаем, что их середины лежат в одной плоскости, что и требовалось.

Комментарий. Общие критерии приведены в группах (G), (M), (X). Схема оценивания официального решения в критериях

(A)–(C). Продвижения (B1) и (B2) не суммируются, все остальные — суммируются.

(G) В неоконченном счётном решении оцениваются лишь продвижения, явно сформулированные в работе и имеющие геометрический смысл.

(M1) Решение не работает лишь в некотором специальном случае (например, одна из вершин X, Y, Z, T — середина ребра тетраэдра) — снимается 1 балл.

(M2) Использование неверных стереометрических утверждений или некорректных построений (например, используется «точка пересечения» скрещивающихся прямых и т.д.) — снимается не менее 2 баллов. (X) (Невозможный) случай, когда $XYZT$ — прямоугольник (или, эквивалентно, что в этом четырёхугольнике есть параллельные стороны) не оценивается.

(A0) Используется без доказательства, что прямые XY, ZT и AC пересекаются в одной точке — баллы не снимаются.

(A) Построены (и явно определены) точки Q и R из официального решения (в частности, указано, что каждая из них лежит на продолжении ребра тетраэдра и продолжениях двух сторон четырёхугольника $XYZT$) — 1 балл.

(B1) Доказано, что точка P лежит на прямой QR — 1 балл.

(B2) Доказано, что P есть середина отрезка QR — 2 балла.

(C0) Утверждение о том, что середины отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых (или в двух параллельных плоскостях) лежат в одной плоскости, можно использовать без доказательства.

(C1) Задача сведена к тому, что на прямых AC и BD есть такие точки U и V, что P есть середина отрезка UV — 1 балл.

11.7. Назовём многочлен $P(x)$ *бицелозначным*, если числа $P(k)$ и $P'(k)$ целые при любом целом k. Пусть $P(x)$ — бицелозначный многочлен степени d, и пусть N_d — произведение всех составных чисел, не превосходящих d (произведение пустого множества сомножителей считаем равным 1). Докажите, что старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ — целый. (*И. Богданов, Г. Челноков*)

Решение. Многочлен $P(x)$ называется *целозначным*, если $P(k)$ — целое число при любом целом k. Нам надо доказать, что, если многочлены $P(x)$ и $P'(x)$ целозначны, причём степень $P(x)$ равна d, то старший коэффициент многочлена $N_d{\cdot}P(x)$ — целый.

Лемма. *Пусть $P(x)$ — целозначный многочлен степени d. Тогда все коэффициенты многочлена $d! \cdot P(x)$ целые.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} P(i)\cdot \frac{(x-0)(x-1)\ldots(x-(i-1))(x-(i+1))\ldots(x-d)}{(i-0)(i-1)\ldots(i-(i-1))(i-(i+1))\ldots(i-d)}.$$

Его степень не больше d, и его значения совпадают с соответствующими значениями $P(x)$ в точках $x = 0, 1, 2, \ldots, d$. Это означает, что многочлен $P(x) - Q(x)$ имеет степень не выше d, а также обнуляется в $d+1$ точке. Поэтому он нулевой, то есть $P(x) = Q(x)$. (Формула выше — это частный случай *интерполяционной формулы Лагранжа.*)

Осталось заметить, что в формуле выше в i-м слагаемом знаменатель равен $(-1)^{d-i} i!(d-i)!$; это число делит $d!$, поскольку $\frac{d!}{i!(d-i)!} = C_d^i$. Значит, при умножении каждого слагаемого на $d!$ получается многочлен с целыми коэффициентами. $\square$

Перейдём к решению задачи. Индукция по d. База при $d = 0$ тривиальна. Для перехода индукции рассмотрим бицелозначный многочлен $P(x)$ степени d; пусть его старший коэффициент равен a.

Если d не является простым числом, то $N_d = dN_{d-1}$. Заметим, что многочлен $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$ также бицелозначный, имеет степень $d-1$ и старший коэффициент ad. По предположению индукции, число $N_{d-1} \cdot ad = N_d a$ является целым, что и требовалось доказать.

Пусть теперь d — простое число; тогда $N_d = N_{d-1}$, и то же рассуждение даёт, что число $dN_d a$ является целым. Предположим, что $N_d a$ — нецелое число; тогда знаменатель числа a (в несократимой записи) делится на простое число d.

Заметим, что сумма всех коэффициентов многочлена $P(x)$ — это целое число $P(1)$. Поскольку знаменатель числа a делится на d, среди коэффициентов многочлена $P(x)$ найдётся ещё один, у которого знаменатель делится на d; пусть это коэффициент b при x^i, $i < d$. Заметим, что $i > 0$, так как число $P(0)$ целое.

Но тогда у целозначного многочлена $P'(x)$ коэффициент при x^{i-1} равен ib и также имеет знаменатель, кратный d. Поскольку d — простое число, отсюда вытекает, что коэффициент при x^{i-1} у многочлена $(d-1)!P'(x)$ нецелый, что противоречит лемме.

Замечание 1. Случай простого d можно разобрать и другими способами. Приведём один из них.

Предположим, что число $dN_d a$ целое, а $N_d a$ — нет, так что $N_d a = t/d$ для некоторого целого t, не кратного d. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = N_d P(x) - N_d a \cdot (x-1)(x-2)\ldots(x-d). \qquad (*)$$

Он целозначен, поскольку при любом целом k число $(k-1)(k-2)\ldots(k-d)$ делится на $d!$. Кроме того, его степень меньше d. Из леммы вытекает, что знаменатели коэффициентов многочлена $Q(x)$ не делятся на d.

Рассмотрим теперь целое число $c = N_d P'(d)$. Из формулы $(*)$ нетрудно получить, что

$$c = Q'(d) + \frac{t}{d} \cdot (d-1)(d-2)\ldots(d-(d-1)).$$

При этом первое слагаемое — это несократимая дробь со знаменателем, не делящимся на d, а второе — с делящимся. Это невозможно для целого c.

Замечание 2. Как доказали D. Brizolis и E. G. Straus, наименьшее N, для которого старший коэффициент многочлена $NP(x)$ обязательно целый, равно $d!\prod_p p^{-k(p,d)}$, где произведение берётся по всем простым p, а $k(p,d)$ — это наибольшее целое неотрицательное число k, для которого верно неравенство $kp^k - (k-1)p^{k-1} \leqslant d$.

Комментарий. (Z1) Доказательство факта, что любой целозначный многочлен степени n после домножения на $n!$ имеет целые коэффициенты — 0 баллов.

(Z2) Выписанный многочлен Лагранжа — 0 баллов.

(Z3) Доказательство факта, что C_x^k является базисом целозначных многочленов — 0 баллов.

(Z4) Доказательство для любого конечного множества различных d — 0 баллов.

(M) Грубые ошибки в доказательстве стандартных утверждений — снимается не менее 1 балла.

(A) Доказан переход индукции для составного d — 1 балл.

(B) Доказано, что в знаменателе многочлена нет простого множителя $p > d/2$, или доказано иное утверждение, из которого немедленно следует переход индукции для простого d — 3 балла.

(C) Показано, что достаточно рассмотреть случай многочлена, кратного $x^2 - 1$ балл. Не суммируется с критерием (B).

11.8. В стране N городов. В ней действует $N(N-1)$ дорог с односторонним движением: по одной дороге из X в Y для каждой упорядоченной пары городов $X \neq Y$. У каждой дороги есть цена её обслуживания. Для данного $k = 1, \ldots, N$ рассмотрим все способы выделить k городов и $N-k$ дорог так, чтобы из каждого города можно было попасть в какой-то выделенный город, пользуясь только выделенными дорогами. Такую систему городов и дорог с наименьшей суммарной стоимостью обслуживания назовём *k-оптимальной.* Докажите, что города можно пронумеровать от 1 до N так, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, N$ существует k-оптимальная система дорог с выделенными городами $1, 2, \ldots, k$. (*В. Буслов*)

Решение. Рассматриваемые сети из $N-k$ дорог называем далее *k-сетями.* Рассмотрим неориентированный граф, образованный дорогами k-сети. В нём не более чем k компонент связности, поскольку в каждой есть выделенный город. С другой стороны, компонент не менее k, поскольку рёбер всего не более чем $N-k$. Поэтому компонент ровно k, каждая из них есть дерево, содержит единственный выделенный город и — вспоминая про ориентацию — рёбра каждого дерева направлены по направлению к выделенному городу. В частности, из каждого не выделенного города должна выходить ровно одна дорога, а из выделенного 0 дорог.

Рассмотрим $(k+1)$-оптимальную сеть A с выделенными городами $y_0, y_1, \ldots, y_k$ и k-оптимальную сеть B с выделенными городами $x_1, \ldots, x_k$. Не умаляя общности, ни из одного x_i нельзя добраться в сети A до города y_0. Пусть U — множество городов, из которых в A можно добраться до y_0, а α, β — множества дорог, выходящих из U в сетях A, B соответственно. Имеем $|\alpha| = |U| - 1$, $|\beta| = |U|$.

Рассмотрим сеть $D := (A \setminus \alpha) \cup \beta$. Утверждается, что это k-сеть для выделенных городов $y_1, \ldots, y_k$. В самом деле, число дорог в ней равно $|D| = N - k - 1 - (|U| - 1) + |U| = N - k$. Из каждого города, кроме $y_1, \ldots, y_k$ выходит ровно одна дорога. Выезжая из любого города вне U и используя дороги сети, мы по-прежнему можем попасть в один из городов $y_1, \ldots, y_k$. Выезжая из города в U, мы либо попадаем вне U — и далее в один из городов $y_1, \ldots, y_k$, — либо зацикливаемся в U. Но тогда β содержит цикл, что невозможно.

Рассмотрим сеть $C := (B \setminus \beta) \cup \alpha$. Утверждается, что это $(k+1)$-сеть для выделенных городов $x_1, \ldots, x_k, y_0$. В самом деле, $|C| = n - k - 1$, и выезжая из любого города по дорогам сети C, мы либо попадаем в U — и тогда по α доезжаем до y_0, — либо ни разу не попадаем в U и тогда доезжаем до одного из городов $x_1, \ldots, x_k$.

Итак, C, D — k-сеть и $(k+1)$-сеть. Сумма их стоимостей такая же, как у A и B. Значит, они обе оптимальны. Таким образом, для сети A удалось выкинуть выделенный город и найти оптимальную k-сеть с оставшимися выделенными городами. Теперь можно построить требуемую нумерацию в обратном порядке (начиная с пустой N-сети).

Комментарий. В 0 баллов оценивается:

a) Описание структуры k-сети.

b) Попытка построить решение на использовании (неверного) свойства наследуемости.

c) Разбор случаев маленького N.

d) Нахождение номера вершины A, если ребро AB имеет строго наименьшую цену.

e) Попытка решить жадным алгоритмом без указания, в какой момент мы отойдём от жадного алгоритма.